

Topología I

Examen XIII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología I

Examen XIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Roxana Acedo Parra

Granada, 2026

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Alarcón López.

Descripción Primer parcial.

Fecha 30 de octubre de 2025.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (1 punto). Define los conceptos de punto adherente y adherencia de un conjunto A en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Demuestra las siguientes propiedades:

- (a) La adherencia $\overline{A}$ de A es cerrado en $(X, \mathcal{T})$.
- (b) Si $C \subset X$ cerrado en $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset C$ entonces $\overline{A} \subset C$
- (c) A es cerrado en $(X, \mathcal{T})$ si y solo si $A = \overline{A}$.

Ejercicio 2 (2 puntos). Denotamos por $\mathcal{T}_u$ la topología usual en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ con $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$, consideramos la familia de subconjuntos

$$\mathcal{T}(A) = \{U \in \mathcal{T}_u : U \cap A = \emptyset\} \cup \{U \in \mathcal{T}_u : A \subset U\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Responde a 4 de los siguientes apartados:

- (a) Demuestra que $\mathcal{T}(A)$ es una topología en $\mathbb{R}$. Determina qué topología de entre $\mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}_u$ es más fina.
- (b) Calcula el interior y la adherencia de $[0, 1]$, $(0, \sqrt{2})$ y $(1, +\infty)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathbb{N}))$ dónde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- (c) Demuestra que el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(\{0, 1\}))$ es 1AN.
- (d) Decimos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_0 (o de Kolmogórov) si para cada par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y$, es decir, existe un entorno de uno de los puntos que no es entorno del otro. Demuestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(A))$ es T_0 si y solo si A consiste de un único punto.
- (e) Determina si el espacio topológico $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathcal{T}(\mathbb{Q})|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}})$ es T_1 .

Ejercicio 1 (1 punto). Define los conceptos de punto adherente y adherencia de un conjunto A en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Demuestra las siguientes propiedades:

- (a) La adherencia $\overline{A}$ de A es cerrado en $(X, \mathcal{T})$.
- (b) Si $C \subset X$ cerrado en $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset C$ entonces $\overline{A} \subset C$
- (c) A es cerrado en $(X, \mathcal{T})$ si y solo si $A = \overline{A}$.

Teoría dada en clase.

Ejercicio 2 (2 puntos). Denotamos por $\mathcal{T}_u$ la topología usual en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ con $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$, consideramos la familia de subconjuntos

$$\mathcal{T}(A) = \{U \in \mathcal{T}_u : U \cap A = \emptyset\} \cup \{U \in \mathcal{T}_u : A \subset U\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Responde a 4 de los siguientes apartados:

- (a) Demuestra que $\mathcal{T}(A)$ es una topología en $\mathbb{R}$. Determina qué topología de entre $\mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}_u$ es más fina. Tenemos $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \mathbb{R}$, y

$$\mathcal{T}(A) = \{U \in \mathcal{T}_u : U \cap A = \emptyset\} \cup \{U \in \mathcal{T}_u : A \subset U\}$$

¿ $\mathcal{T}(A)$ topología en $\mathbb{R}$? Comprobamos (A1), (A2), (A3)

- (A1) $\emptyset \in \mathcal{T}_u$, $\emptyset \cap A = \emptyset \implies \emptyset \in \mathcal{T}(A)$.
 $\mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$, $A \subset \mathbb{R} \implies \mathbb{R} \in \mathcal{T}(A)$.

- (A2) Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(A)$. ¿ $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(A)$?
 Como $\mathcal{T}_u$ es topología y $U_i \in \mathcal{T}_u \forall i \in I$, tenemos que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_u$.
 Ahora si $U_i \cap A = \emptyset \forall i \in I$, entonces:

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \emptyset \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(A)$$

Si por el contrario $\exists j \in I$ tal que $A \subset U_j$, entonces $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, luego $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(A)$.

- (A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}(A)$. ¿ $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(A)$?
 Como $\mathcal{T}_u$ es topología y $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_u$, tenemos que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_u$.
 Ahora si $A \subset U_1$ y $A \subset U_2$, entonces $A \subset U_1 \cap U_2$, luego $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(A)$.
 Por el contrario $\exists i \in \{1, 2\}$ tal que $A \cap U_i = \emptyset$, entonces $A \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$, luego $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(A)$.

Como $\mathcal{T}(A)$ cumple (A1), (A2) y (A3), es una topología.

¿Qué topología de entre $\mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}_u$ es más fina?

Por definición de $\mathcal{T}(A)$, todos los abiertos de $\mathcal{T}(A)$ lo son de $\mathcal{T}_u$ (es decir, $U \in \mathcal{T}(A) \implies U \in \mathcal{T}_u$), luego $\mathcal{T}(A) \leq \mathcal{T}_u$.

En general, $\mathcal{T}_u \not\subset \mathcal{T}(A)$, esto solo ocurre cuando A solo tiene un elemento, en ese caso $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}_u$.

- (b) Calcula el interior y la adherencia de $[0, 1]$, $(0, \sqrt{2})$ y $(1, +\infty)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathbb{N}))$ dónde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\mathcal{T}(\mathbb{N}) = \{U \in \mathcal{T}_u : U \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{U \in \mathcal{T}_u : \mathbb{N} \subset U\}$$

- De $[0, 1]$:

$$[0, 1]^\circ = (0, 1)$$

En efecto: $(0, 1) \in \mathcal{T}_u$ y $(0, 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset \implies (0, 1) \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$.

Además 0 y 1 no son puntos interiores de $[0, 1]$ ya que cualquier entorno de uno de estos puntos contiene un abierto de $\mathcal{T}_u$, luego un intervalo abierto, que contiene al punto, y un intervalo así no puede estar contenido en $[0, 1]$. En conclusión, $(0, 1)$ es el mayor abierto en $\mathcal{T}(\mathbb{N})$ dentro de $[0, 1]$.

$$\overline{[0, 1]} = [0, 1] \cup \mathbb{N}$$

En efecto: $[0, 1] \cup \mathbb{N} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}(\mathbb{N})}$ porque su complementario está en $\mathcal{T}_u$ y no corta a $\mathbb{N}$.

Además, si $x \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$ con $x \in U$, entonces $U \notin \mathcal{T}_u \implies \mathbb{N} \subset U$, luego U es entorno de 1. Esto implica que $x \in \overline{[0, 1]}$.

En conclusión, $[0, 1] \cup \mathbb{N}$ es el cerrado más pequeño que contiene a $[0, 1]$.

- Usando argumentos similares a los anteriores, tenemos que:

$$(0, \sqrt{2})^\circ = (0, \sqrt{2}) \setminus \{1\}$$

(En efecto, $(0, \sqrt{2}) \setminus \{1\} \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$ porque está en $\mathcal{T}_u$ y no corta a $\mathbb{N}$, y 1 no es interior a $(0, \sqrt{2})$ porque cualquier entorno suyo contiene a $\mathbb{N}$.)

$$\overline{(0, \sqrt{2})} = [0, \sqrt{2}] \cup \mathbb{N}$$

$$(1, +\infty)^\circ = (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$$

$$\overline{(1, +\infty)} = [1, +\infty)$$

- (c) Demuestra que el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(\{0, 1\}))$ es 1AN.

$$\mathcal{T}(\{0, 1\}) = \{U \in \mathcal{T}_u : U \cap \{0, 1\} = \emptyset\} \cup \{U \in \mathcal{T}_u : \{0, 1\} \subset U\}$$

Tenemos que encontrar de cada punto $x \in \mathbb{R}$ una base de entornos numerable:

- Si $x \notin \{0, 1\}$, tomemos por ejemplo:

$$\beta_x = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

¿Es β_x b.d.e. de x ?

$\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$ contiene en x un intervalo centrado y disjunto de $\{0, 1\}$, luego

$(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ es entorno de x en $\mathcal{T}(\{0, 1\})$. Así, $\beta_x \subset \mathcal{N}_x$.

Ahora; si $N \in \mathcal{N}_x$, $\exists U \in \mathcal{T}(\{0, 1\})$ con $x \in U \subset N$.

Como $U \in \mathcal{T}_u$, $\exists n \in \mathbb{N}$ con $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subset U \subset N \implies \beta_x$ b.d.e.

- Si $x \in \{0, 1\}$, tomamos por ejemplo:

$$\beta_x = \left\{ \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \cup \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

¿Es β_x b.d.e. de x ?

Primero, cada elemento de β_x contiene a $\{0, 1\}$, es abierto en $\mathcal{T}_u$ y luego abierto en $\mathcal{T}(\{0, 1\})$. Así, $\beta_x \subset \mathcal{N}_x$.

Ahora si $N \in \mathcal{N}_x$, con $x \in U \subset N$, tenemos que no puede ser $U \cap \{0, 1\} = \emptyset$, así que se cumple que $\{0, 1\} \subset U$. Además, $U \in \mathcal{T}_u$, así que $\exists n \in \mathbb{N}$ con $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \cup (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) \subset U \subset N \implies \beta_x$ b.d.e. de x .

Como β_x es numerable $\forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(\{0, 1\}))$ es 1AN.

- (d) Decimos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_0 (o de Kolmogórov) si para cada par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y$, es decir, existe un entorno de uno de los puntos que no es entorno del otro. Demuestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(A))$ es T_0 si y solo si A consiste de un único punto.

¿ $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(A))$ es T_0 para algún A ? ¿o para algún A ?

$\implies$ Sup. $\exists x, y \in A$ son $x \neq y$.

Sea $N \in \mathcal{N}_x$. Entonces $\exists U \in \mathcal{T}(A)$ con $x \in U \subset N$.

Como $x \in A$ y $x \in U$, tenemos que $A \subset U$, luego $y \in U \subset N$.

Esto implica que $N \in \mathcal{N}_y$. Así, $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{N}_y$.

El mismo razonamiento demuestra que $\mathcal{N}_y \subset \mathcal{N}_x$, luego $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$.

Por tanto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(A))$ no es T_0 .

$\Leftarrow$ Si $A = \{x_0\}$, entonces $\mathcal{T}(A) = \{U \in \mathcal{T}_u : x_0 \notin U\} \cup \{U \in \mathcal{T}_u : x_0 \in U\} = \mathcal{T}_u$.

Pero $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es claramente T_0 , de hecho es T_2 , luego $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(A)) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es T_0 .

- (e) Determina si el espacio topológico $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathcal{T}(\mathbb{Q})|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}})$ es T_1 .

¿ $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathcal{T}(\mathbb{Q})|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}})$ es T_1 ?

Un e.t. es T_1 si y solo si los conjuntos con un único elemento son cerrados.

Para demostrar que $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathcal{T}(\mathbb{Q})|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}})$ es T_1 , basta comprobar que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{x\}$ es cerrado en ese espacio. Su complementario en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{x\}$.

Ahora, como $\mathbb{R} \setminus \{x\} \in \mathcal{T}_u$ y $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus \{x\}$, tenemos que $\mathbb{R} \setminus \{x\} \in \mathcal{T}(\mathbb{Q})$, luego $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{x\}$ es la intersección de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con un abierto de $\mathcal{T}(\mathbb{Q})$, esto es, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{x\} \in \mathcal{T}(\mathbb{Q})|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

Por tanto $\{x\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}(\mathbb{Q})|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}}$, lo que demuestra que el espacio es T_1 .